



TITLE:

# High-energy behavior of total cross sections for 3-body quantum systems

AUTHOR(S):

伊藤, 宏

---

CITATION:

伊藤, 宏. High-energy behavior of total cross sections for 3-body quantum systems. 数理解析研究所講究録 1992, 779: 1-15

ISSUE DATE:

1992-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82483>

RIGHT:

# High-energy behavior of total cross sections for 3-body quantum systems

京大・理 伊藤 宏 (Hiroshi Ito)

序 3体 Schrödinger 方程式の全散乱断面積の高エネルギーでの挙動を考える。始状態において, 粒子1,2 が束縛状態をつくり, その複合粒子に残りの粒子(粒子3)が衝突してくるとしよう。終状態として次の3つの場合が考えられる。

- (i) 始状態のときとは異なるペアが複合粒子をつくり, 他の粒子と独立に運動する。
- (ii) 始状態のときと同じペア(粒子1,2)が束縛状態をつくり(束縛エネルギーは変化しているかもしれない), 残りの粒子と独立に運動する。
- (iii) 3個すべて独立に運動する。

始状態を  $\alpha$ , 終状態を  $\beta$  で表わそう。  $\lambda > 0$ ,  $\omega \in S^2$  を各々系の全エネルギー, 入射方向とする。散乱  $\alpha \rightarrow \beta$  に対する全散乱断面積  $\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \omega)$  の  $\lambda \rightarrow +\infty$  における挙動を調べる

ことが我々の目的である。得られた結果を粗く述べると次のようになる。ただし、各 pair potential は十分滑らかで、十分速く遠方で decay しているものとする。

$\lambda \rightarrow +\infty$  のとき、

$$\beta \text{ が (i) の場合 } T_{\lambda \rightarrow \beta} = O(\lambda^{-L}), \quad L \gg 1,$$

$$\beta \text{ が (ii), (iii) の場合 } T_{\lambda \rightarrow \beta} = O(\lambda^{-1}).$$

## §1 Notations, Results

$m_j > 0$ ,  $r_j \in \mathbb{R}^N$  ( $1 \leq j \leq 3$ ,  $N \geq 3$ ) を各々粒子  $j$  の質量および位置ベクトル。  $V_{ij}(r_i - r_j)$  を粒子  $i$ - $j$  間の pair potential とする。  $V_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ) に次の仮定をおく。ただし、 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  または  $\ell = 3/2$  とする。

$$(V)_\ell \left\{ \begin{array}{l} V_{ij} \in C^{2\ell+2}(\mathbb{R}^N), \text{ real} \\ \exists \delta > \ell + \frac{N+1}{2} \text{ s.t. } |\partial_x^\alpha V_{ij}(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\delta}, |\alpha| \leq 2\ell+2 \\ \text{ここで } \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}. \end{array} \right.$$

2-cluster 分解全体を  $A_2$  で表わす：

$$A_2 = \{a = \{(i, j), k\} \mid \{(i, j), k\} = \{1, 2, 3\}, i < j\}.$$

$a = \{(i, j), k\} \in A_2$  に対して、Jacobi 座標  $(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  を

$$x_a = r_i - r_j, \quad y_a = r_k - \frac{m_i r_i + m_j r_j}{m_i + m_j}$$

で定義する。重心系で考えたこの系の Hamiltonian  $H$  は、この座標系を用いると

$$H = H_0 + V \quad \text{in } \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2N}),$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m_a} \Delta_{x_a} - \frac{1}{2m_a} \Delta_{y_a}, \quad V = \sum_{1 \leq p < q \leq 3} V_{ij}(r_p - r_q),$$

とかける。ここに、 $m_a, n_a$  は  $m_a^{-1} = m_i^{-1} + m_j^{-1}$ ,  $n_a^{-1} = m_k^{-1} + (m_i + m_j)^{-1}$  で定義される換算質量である。

$A = \{(i, j), k\}$  とするとき、粒子  $i$  と粒子  $j$  の 2 体 Schrödinger 作用素は、

$$h_a = -\frac{1}{2m_a} \Delta_{x_a} + V_{ij}(x_a) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)$$

で与えられる。いま、 $d_a$  を  $h_a$  の負の固有値の個数 (重複も数えて) とし、

$$\Gamma_2 = \{\alpha = (a, k) \mid a \in A_2, k = 1, \dots, d_a\}$$

とおく。 $\alpha = (a, k)$  は  $h_a$  の  $k$  番目の固有状態を表わしており、2-body channel と呼ばれる。 $\alpha = (a, k)$  に対し、 $\lambda_\alpha$  で  $h_a$  の  $k$  番目の固有値 ( $< 0$ )、 $\psi_\alpha$  で対応する固有ベクトルを表わす。ただし、 $a \in A_2$  を固定したとき、

$\{\psi_\alpha\}_{D(\alpha)=a}$  は ONS をなしているものとする。ここで、 $\alpha = (a, k)$  のとき、 $D(\alpha) = a$  とかいた。

各  $\alpha \in \mathcal{P}_2$  ( $\alpha = D(a)$ ) に対し, channel Hamiltonian  $H_\alpha$ , channel identification operator  $J_\alpha: L^2(\mathbb{R}_{y_a}^N) \rightarrow \mathcal{H}$  を

$$H_\alpha = \lambda_\alpha - \frac{1}{2m_a} \Delta_{y_a}, \quad J_\alpha u = \psi_\alpha \otimes u$$

で定義する。さて, 仮定  $(V)_0$  のもと, 次の channel wave operator  $W_\alpha^\pm: L^2(\mathbb{R}_{y_a}^N) \rightarrow \mathcal{H}$  の存在が知られている (例えば [RS]) :

$$W_\alpha^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J_\alpha e^{-itH_\alpha},$$

さらに, 3-body channel に対する channel wave operator  $W_0^\pm: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  の存在も知られている ([RS]) :

$$W_0^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}.$$

いま,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 \cup \{0\}$  とおく。散乱  $\alpha \rightarrow \beta$  に対応する scattering operator  $S_{\alpha \rightarrow \beta}$  は

$$S_{\alpha \rightarrow \beta} = W_\beta^{+*} W_\alpha^- \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{P})$$

で定義される。scattering operator は, 次の性質を持つ:

$$e^{-itH_\beta} S_{\alpha \rightarrow \beta} = S_{\alpha \rightarrow \beta} e^{-itH_\alpha}.$$

このことから,  $H_\alpha, H_\beta$  のスペクトル表現を用いることによって,  $S_{\alpha \rightarrow \beta}$  は, direct integral で表現できることがわか

る。例えば,  $\alpha \in \Gamma_2$  のとき, ユニタリ作用素  $Z_\alpha: L^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^N)$   
 $\rightarrow L^2((\lambda_\alpha, \infty); L^2(S^{N-1}))$  を

$$(Z_\alpha f)(\lambda, \omega) = n_\alpha^{\frac{1}{2}} \mu_\alpha^{\frac{N-2}{2}} \hat{f}(\mu_\alpha \omega), \quad \alpha = D(\lambda)$$

$$\mu_\alpha = (2m_\alpha(\lambda - \lambda_\alpha))^{1/2},$$

で定義する。ただし,  $\hat{\cdot}$  は Fourier 変換。すると,  $\alpha, \beta \in \Gamma_2$   
 のときは, a.e.  $\lambda > \lambda_{\alpha\beta} := \max(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)$  で定義された  $L^2(S^{N-1})$   
 上の有界作用素の族  $\{S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda)\}$  が存在して,

$$Z_\beta S_{\alpha \rightarrow \beta} Z_\alpha^* = \int_{\lambda > \lambda_{\alpha\beta}}^{\oplus} S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda) d\lambda$$

となる。 $S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda)$  は scattering matrix と呼ばれている。

同様に  $\beta = 0$  の場合も ( $\alpha \in \Gamma_2$ ), scattering matrix  $S_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda):$   
 $L^2(S^{N-1}) \rightarrow L^2(S^{2N-1})$  の存在がわかる。

以下,  $\alpha \in \Gamma_2, \beta \in \Gamma$  とする。

まず,  $\beta \in \Gamma_2$  のときの  $S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda)$  の性質をまとめておく。

$\left\{ \begin{array}{l} S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda) - \delta_{\alpha\beta} \text{ (}\delta_{\alpha\beta} \text{ は Kronecker's delta)} \text{ は, Hilbert-Schmidt (H-S)} \\ \text{norm で連続であり, その積分核を } T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \theta, \omega) \text{ とする} \\ \text{と } T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \cdot, \omega) \text{ は } L^2(S^{N-1})\text{-値関数として } (\lambda, \omega) \in (0, \infty) \times S^{N-1} \\ \text{に関して強連続である。} \end{array} \right.$

上の事実は,  $\alpha, \beta \in \Gamma_2$  のときには, 2体 Schrödinger 方程式

の散乱の場合と同様にして,  $T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \theta, \omega)$  の表現が得られるので確かめることができる。また, この表現が我々の解析の出発点となる。

次に  $S_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda)$  について述べる。そのために, 次の条件を追加する。

$$(Z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a = \{(i, j), k\} \in A_2 \text{ に対して, } -1 \notin \sigma_p(\hat{h}_a), \text{ ここに} \\ \hat{h}_a = V_{ij}^{1/2} \left( -\frac{1}{2m_a} \Delta_{x_a} - 0 - i0 \right)^{-1} |V_{ij}|^{1/2} \\ (f^{1/2} = |f|^{1/2} \operatorname{sgn} f) \end{array} \right.$$

この仮定のもと,  $h_a$  は 0 を固有値として持たないことが知られている (例えば [GM])。

$$\left\{ \begin{array}{l} (V)_0, (Z) \text{ を仮定すると } S_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda) \text{ は } \lambda \gg 1 \text{ において H-S} \\ \text{norm で連続であり, その積分核を } T_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda, \theta, \omega) \text{ とす} \\ \text{ると } T_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda, \cdot, \omega) \text{ は } L^2(S^{N-1})\text{-値関数として, } (\lambda, \omega) \in \\ (0, \infty) \times S^2 \text{ に関して強連続である。} \end{array} \right.$$

このことは, Faddeev の方法を用いて確かめることができる ([AJS], [AS])。

さて, ここで total scattering cross section (全散乱断面積) の定義を与えよう。

(I)  $\alpha \in \Gamma_2$ ,  $\beta \in \Gamma$  ( $D(\alpha) = \alpha$ ) のとき,

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \omega) = (2\pi)^{N-1} \mu_{\alpha}^{1-N} \int_{S^{\beta}} |T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \theta, \omega)|^2 d\theta$$

を散乱  $\alpha \rightarrow \beta$  に対する全散乱断面積と呼ぶ。ここに,  $\lambda$  は系の全エネルギー,  $\omega$  は入射方向, また

$$S^{\beta} = \begin{cases} S^{N-1} & \beta \in \Gamma^2 \\ S^{2N-1} & \beta = 0 \end{cases}$$

とする。ただし,  $\beta \in \Gamma_2$  のときは  $(V)_0$  を,  $\beta = 0$  のときは,  $(V)_0$  と (2) を仮定しているものとする。

(II)  $\alpha \in \Gamma_2$  のとき

$$\sigma_{\alpha}(\lambda, \omega) = \sum_{\beta \in \Gamma} \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \omega)$$

を 始状態が  $\alpha$  である散乱に対する全散乱断面積と呼ぶ。ここに,  $(V)_0$ , (2) を仮定しているものとする。

$\alpha = \{(i, j), k\} \in A_2$  に対して, intercluster potential  $I_{\alpha}$  を  $I_{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}) = V - V_{ij}(x_{\alpha})$  で定義し,  $\omega \in S^{N-1}$ ,  $\eta \in \Pi_{\omega} := \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi \cdot \omega = 0\}$  に対して,

$$W_{\alpha}(x_{\alpha}; \omega, \eta) = \int_{\mathbb{R}} I_{\alpha}(x_{\alpha}, t\omega + \eta) dt$$

とおく。また,  $(\cdot, \cdot)_{\alpha}$ ,  $\|\cdot\|_{\alpha}$  で  $L^2(\mathbb{R}_{x_{\alpha}}^N)$  における内積および norm を表わす。



Theorem 1  $\alpha \in \mathbb{R}_2$ ,  $D(\alpha) = a$  とする。  $\nu > 0$  に對し

$$\lambda(\nu) = \frac{1}{2} n_a \nu^2 + \lambda_\alpha$$

と置く。

(i)  $(V)_\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  を仮定。  $\beta \in \mathbb{R}_2$ ,  $D(\beta) \neq a$

$$(1) \Rightarrow \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(\nu), \omega) = O(\nu^{-2\ell-4}), \quad \nu \rightarrow +\infty$$

(ii)  $(V)_0$  を仮定。  $\beta \in \mathbb{R}_2$ ,  $D(\beta) = a$

$$(2) \Rightarrow \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(\nu), \omega) = \nu^{-2} \int_{\pi_\omega} |W_a(\cdot; \omega, \eta) \psi_\alpha, \psi_\beta|_a|^2 d\eta + o(\nu^{-2}).$$

(iii)  $(V)_0$ , (Z) を仮定。

$$(3) \Rightarrow \sigma_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda(\nu), \omega) = \nu^{-2} \int_{\pi_\omega} \|P^{\text{cont}}(h_a) W_a(\cdot; \omega, \eta) \psi_\alpha\|_a^2 d\eta + o(\nu^{-2}),$$

$$(4) \quad \sigma_\alpha(\lambda(\nu), \omega) = \nu^{-2} \int_{\pi_\omega} \|W_a(\cdot; \omega, \eta) \psi_\alpha\|_a^2 d\eta + o(\nu^{-2}),$$

(1) ~ (4) がすべて  $\omega \in S^{N-1}$  に関して一様。

Theorem 2 上の定理で (ii) および (iii) における仮定  $(V)_0$

を  $(V)_{3/2}$  にすると, (2), (3), (4) における remainder term  $o(\nu^{-2})$  はすべて  $O(\nu^{-3})$  とすることができる。

## §2. Resolvent estimates

$\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して次の仮定を  $(U)_\ell$  と呼ぶ.

$$(U)_\ell \quad \begin{cases} V_{ij} \in C^{2\ell+2}(\mathbb{R}^3) \\ |\partial^\alpha V_{ij}(x)| \leq C \langle x \rangle^{\min(|\alpha|, \ell+2)}, \quad |\alpha| \leq 2\ell+2. \end{cases}$$

( $N \geq 3$  より)  $(V)_\ell \Rightarrow (U)_\ell$ .

$v > 0, \omega \in S^{N-1}$  に対して.

$$\begin{aligned} L(v, \omega) &= v^{-1}(H - \lambda_\alpha) - i\omega \cdot \nabla_{y_\alpha} \\ &= e^{-i\alpha v \omega \cdot y_\alpha} v^{-1}(H - \lambda(v)) e^{i\alpha v \omega \cdot y_\alpha} \end{aligned}$$

とおく.  $k, S \in \mathbb{R}$  に対して, 関数空間  $H_S^k$  と

$$H_S^k = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) \mid \|f\|_{k,S} = \|\langle x_\alpha, y_\alpha \rangle^S (-\Delta + 1)^{k/2} f\| < \infty \}$$

とおく. ここに,  $\langle x, y \rangle = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$ ,  $\Delta = \Delta_{x_\alpha} + \Delta_{y_\alpha}$ .

Proposition 3 (i)  $(U)_\ell$  を仮定.  $k$  integer,  $S$  real

$0 \leq k \leq \ell$ ,  $k + \frac{1}{2} < S$  とする. このとき,

$$(5) \quad \exists (L(v, \omega) - i0)^{-1} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (L(v, \omega) - i\varepsilon)^{-1} \text{ in } B_{k,S},$$

ここで  $B_{k,S} = B(H_S^k, H_{-S}^k)$ , さらに

$$(6) \quad \sup_{v \geq 1, \omega \in S^{N-1}} \|(L(v, \omega) - i0)^{-1}\|_{B_{k,S}} < \infty.$$

(ii)  $(U)_1$  を仮定.

$$(7) \Rightarrow \| (L(v, \omega) - i0)^{-1} - (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i0)^{-1} \|_{B(H^s_2, H^{-s}_2)} = O(v^{-1}),$$

as  $v \rightarrow \infty$ , uniformly in  $\omega \in S^{n-1}$

詳細は省略しますが, この Proposition の証明について少しだけ述べます。

$$X = \langle x_a, y_a \rangle, \quad D = (\partial_{x_a}, \partial_{y_a}), \quad L = L(v, \omega) \quad \text{とおく。}$$

(6) を示すために,

$$(8) \quad X^{-s} D^{\alpha} (L - i\varepsilon)^{-1} \langle D \rangle^{-k} X^{-s}, \quad |\alpha| \leq k, \quad \varepsilon > 0,$$

の形の作用素の norm を評価しなければならぬ。いま,  $D^{\alpha}$  を  $(L - i\varepsilon)^{-1}$  の右に移すことを考え, さらに resolvent eq.

$$(L - i\varepsilon)^{-1} = (L - i)^{-1} + i(\varepsilon - 1)(L - i\varepsilon)^{-1}(L - i)^{-1}$$

を用いると  $([D, (L - i\varepsilon)^{-1}] = -v^{-1}(L - i\varepsilon)^{-1}[D, V](L - i\varepsilon)^{-1})$  より

$$(9) \quad X^{-s} A_1 (L - i\varepsilon)^{-1} A_2 (L - i\varepsilon)^{-1} \cdots A_{m-1} (L - i\varepsilon)^{-1} A_m X^{-s}$$

の形の作用素を評価すればよいことがわかる。ここに, 各  $A_j$  は  $D^{\alpha} V_{ij}$  と  $(L - i)^{-1}$  の有限個の積である。(9) の評価は Jensen-Mourre-Perry ([JMP]) による multiple commutator method を用いて証明することができる。同じタイプの評価は [I1] でもなされている。

### §3. 定理の証明の方針 (詳しくは [I2])

### 3.1. (1) の証明について ( $D(\alpha) \neq D(\beta)$ )

$v' > 0$  を  $\lambda(v) = \frac{1}{2} m_b v'^2 + \lambda_\beta$ ,  $D(\beta) = \ell$  となるように定める。このとき,  $T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(v), \theta, \omega)$  は

$$\begin{aligned} & T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(v), \theta, \omega) \\ (10) \quad &= C(v) \left( [-I_a + v' I_b (L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a] \psi_\alpha, e^{i m_b v' \theta \cdot y_b - i m_a v \omega \cdot y_a} \right) \\ & C(v) = i (2\pi)^{-N+1} (m_a m_b)^{\frac{N-1}{2}} (v v')^{\frac{N-2}{2}}, \end{aligned}$$

となる。

$a \neq \ell$  より,  $y_a = m x_a + n y_b$ ,  $m \neq 0$ 。よって,

$$e^{i m_b v' \theta \cdot y_b - i m_a v \omega \cdot y_a} = e^{-i n_a m v \omega \cdot x_b} \times e^{i \cdots y_b}.$$

従って, (10) の右辺の積分を  $x_b$  で部分積分することによって (1) を得ることが出来る。ただし, ここで, Proposition 3 (i) を用いる。

### 3.2. (2) の証明について ( $D(\alpha) = D(\beta)$ )

$E_\beta := J_\beta J_\beta^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  とおく。このとき,  $T_{\alpha \rightarrow \beta}$  は次のように表現することができる。

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{T}_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(v), \omega) \\
 (11) \quad &= 2v^{-2} \operatorname{Im} (E_{\beta}(L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha}, I_a \psi_{\alpha}) \\
 &+ 2v^{-3} \operatorname{Im} (E_{\beta} I_b (L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha}, (L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha}).
 \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
 & (L(v, \omega) - i\varepsilon)^{-1} - (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i\varepsilon)^{-1} \\
 &= -v^{-1} (L(v, \omega) - i\varepsilon)^{-1} (H - \lambda_{\alpha}) (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i\varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

と Proposition 3 (i) ( $k=0$ ) を用いると,  $S > 1/2$  のとき,

$$(12) \quad \| (L(v, \omega) - i0)^{-1} - (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha} \|_{H^0_3} = o(1), \quad v \rightarrow \infty,$$

を得る。(2) は, (11) と (12) を使って示すことができる。

### 3.3 (4) の証明について.

仮定 (V)<sub>0</sub>, (I2) のもと, 各  $h_c$  ( $c \in A_2$ ) は, 負の固有値以外の固有値を持たない。従って, 漸近完全性 ([E]) は

$$\mathcal{H}_{ac}(H) = \sum_{\beta \in T} \oplus \operatorname{Range} W_{\beta}^{\pm}$$

を意味する。このことから, 光学定理と呼ばれる次の定理が示される。

Theorem 4  $\alpha \in \mathbb{P}_2$ , (V)<sub>0</sub>, (2) を仮定.

$$(3) \Rightarrow \sigma_\alpha(\lambda, \omega) = -2(2\pi)^{N-1} \mu_\alpha^{1-N} \operatorname{Re} T_{\alpha \rightarrow \alpha}(\lambda, \omega, \omega)$$

for  $\omega \in S^2$ ,  $\lambda \gg 1$ .

この定理と (12) を用いて, (4) が示される.

3.4. (3) の証明について

仮定 (V)<sub>0</sub>, (2) のもと,  $\sigma_{\alpha \rightarrow 0} = \sigma_\alpha - \sum_{\beta \neq 0} \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}$  だから,  
(1), (2), (4) を用いて, (3) が示される.

## References

- [Ag] S. Agmon, Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations, Princeton, Princeton University Press, 1982.
- [ABG] W. O. Amrein, A. M. Berthier, V. Georgescu, On Mourre's approach to spectral theory, *Helv. Phys. Acta.*, 62 (1989), 1-20.
- [AJS] W. O. Amrein, J. M. Jauch, K. B. Sinha, Scattering theory in quantum mechanics, Benjamin, Reading, 1977.
- [APS] W. O. Amrein, D. B. Pearson, K. B. Sinha, Bounds on the total scattering cross-section for N-body systems, *Nuovo Cimento*, 52 (1979), 115-131.
- [AS] W. O. Amrein, K. B. Sinha, On three-body scattering cross sections, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15 (1982), 1567-1586.
- [CFKS] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [E] V. Enss, "Quantum scattering theory of two-and three-body systems with potentials of short and long range" in *Schrödinger operators*, ed. S. Graffi, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1159, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
- [ES] V. Enss, B. Simon, Finite total cross sections in non-relativistic quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.*, 76 (1980), 177-209.
- [GM] J. Ginibre, M. Moulin, Hilbert space approach to the quantum mechanical three body problem, *Ann. Inst. H. Poincaré*, A 21

(1974), 97-145.

- [Ha] G. A. Hagedorn, Born series for  $(2 \text{ cluster}) \rightarrow (2 \text{ cluster})$   
Scattering of two, three, and four particle Schrödinger operators,  
Comm. Math. Phys., 66 (1979), 77-94.
- [I1] H. T. Ito, Charge transfer model and  $(2 \text{ cluster}) \rightarrow (2 \text{ cluster})$   
three-body scattering, J. Math. Kyoto Univ., (to appear).
- [I2] H. T. Ito, High-energy behavior of total scattering cross  
sections for 3-body quantum systems
- [IT] H. T. Ito, H. Tamura, Semi-classical asymptotics for total  
scattering cross sections of 3-body systems, J. Math. Kyoto Univ.,  
(to appear).
- [J] A. Jensen, Propagation estimates for Schrödinger-type operators,  
Trans. AMS, 291 (1985), 129-144.
- [JMP] A. Jensen, E. Mourre, P. A. Perry, Multiple commutator estimates  
and resolvent smoothness in quantum scattering theory, Ann. Inst.  
H. Poincaré A, 41 (1984), 207-225.
- [M] E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain  
selfadjoint operators, Comm. Math. phys., 78 (1981), 391-408.
- [PSS] P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, Spectral analysis of N-body  
Schrödinger operators, Ann. Math., 114 (1981), 519-567.
- [RS] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. III,  
IV, Academic Press, 1978, 1979.
- [T] H. Tamura, Principle of limiting absorption for N-body Schrödinger  
operators, -a remark on the commutator methods, Lett. in Math.  
Phys., (1989), 17, 31-36.